PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Facultad de Física
Instituto de Física

Tarea 5

Relatividad y Gravitación

Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Cristóbal Armaza (cyarmaza@uc.cl)

- Puede desarrollar sus respuestas a mano o en formato digital.
- **Plazo de entrega: día del examen, al inicio del mismo (¡eximidos también!)**
- Una tarea ordenada hace a un corrector feliz.

Problemas a resolver

Problema 1. Considere la métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker en su forma usual

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\, d\Omega^2\right).$$

(a) Muestre explícitamente que, para un fluido perfecto isotrópico y homogéneo ($\rho = \rho(t)$ y $p = p(t)$), la ecuación de Einstein implica las *dos* ecuaciones no-triviales

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi\rho}{3}; \qquad\qquad \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi p.$$

¿Por qué las otras ecuaciones no son necesarias? (punto significa d/dt).

(b) Por otro lado, considere la ecuación de conservación de energía $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$. Como existe homogeneidad espacial, sólo la componente temporal de esta ecuación es no-trivial. Muestre que dicha componente equivale a

$$\frac{d}{dt}\left(\rho a^3\right) = -p\frac{d}{dt}\left(a^3\right).$$

Compare esta ecuación con la primera ley termodinámica y comente.

(c) Compruebe que la ecuación de conservación obtenida en (b), más la ecuación de primer orden del inciso (a) implican la ecuación de segundo orden del inciso (a). Muestre que esta última se puede escribir en la forma

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}\left(\rho + 3p\right).$$

Interprete.

Problema 2: Friedmann vs. Minkowski.

(a) Como un modelo cosmológico simplificado, considere un universo vacío ($\rho = p = 0$), pero en expansión ($\dot{a} > 0$). Muestre que la "curvatura espacial" k de este universo es necesariamente no nula, identifique su signo, y calcule cómo varía su factor de escala en el tiempo, $a(t)$.

(b) Por otro lado, explique por qué la condición de un espacio-tiempo vacío necesariamente corresponde al espacio de Minkowski (Relatividad Especial).

(c) En este espacio vacío, descrito por cierto sistema de "coordenadas minkowski-esféricas" (t, r, θ, ϕ), $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2\, d\Omega^2$, considere un conjunto de observadores inerciales, todos los cuales pasan por el "evento origen" $t = r = 0$, en el cual los relojes de todos ellos marcan el tiempo propio $\tau = 0$. ¿Cuál es la ecuación de la hiper-superficie sobre la cual los relojes de todos los observadores anteriores marcan el mismo tiempo propio $\tau > 0$?

Hint 1: argumente que los observadores inerciales se mueven en las trayectorias radiales $r = vt$, en donde v es la velocidad de cada observador. Muestre entonces que la hipersuperficie es una hipérbola $\tau^2 = t^2 - r^2$.

(d) Dado que la hipersuperficie del inciso anterior tiene 3 dimensiones, puede ser descrita en términos de 3 coordenadas, por ejemplo r, θ, ϕ. Encuentre su métrica en términos de estas coordenadas. ¿Es plana o curva?

Hint 2: usando el inciso anterior, y para un τ dado, elimine dt de la métrica dada en el inciso (c). Redefiniendo una coordenada $\tilde{r} = \tilde{r}(r, \tau)$ (una transformación que usted debe encontrar), muestre que

$$ds^2 = \tau^2 \left[\frac{d\tilde{r}^2}{1 + \tilde{r}^2} + \tilde{r}^2\, d\Omega^2 \right].$$

(e) En no más de un par de líneas, ¿cuál es la relación entre (a) y (d)?

Problema 3. Considere un universo en expansión descrito por la métrica de FLRW plana ($k = 0$) en su forma "cartesiana", $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$.

(a) ¿Qué componentes de p_μ son conservados sobre las geodésicas?

(b) Muestre que la energía de una partícula de masa m es

$$E(t) = \sqrt{m^2 + p^2/a^2(t)},$$

en donde p^2 es una cantidad conservada a lo largo de la trayectoria que usted debe determinar. ¿Cuál es la expresión análoga para fotones?

(c) Un fotón de frecuencia ν_0 es emitido en un tiempo t_1. ¿Cuál es su frecuencia medida en un tiempo $t_2 > t_1$? ¿Es mayor o menor que ν_1?

(d) Defina el *redshift* (corrimiento al rojo) cosmológico, z, mediante la relación

$$1 + z \equiv \frac{a(t_{\text{hoy}})}{a(t)},$$

así, un evento "a redshift z" significa un evento "a un tiempo t", normalizando tal que hoy es $z = 0$. ¿Cuál era la energía de los fotones del CMB a un redshift $z \approx 10^3$ si hoy éstos son medidos con energía $E(t_{\text{hoy}}) \approx 3 \times 10^{-4}\,\text{eV}$?